

線形代数学における整数値行列の問題作成の技法について

Introduction of the method of making integer value Matrices
for good example problems of linear algebra.

玉木 正一
Masakazu TAMAKI

1. 線形代数学（＊１）に現れる行列

線形代数学では、行列は連立方程式の解を求めるスマートな手段として現れている。行列自身の演算の説明、学習はそれ程困難ではないが、有理数値、実数値の行列の計算は困難が伴い、線形代数学の学習の障害になっている。そこで、此処では3次、4次行列の整数値逆行列の作成法考えてみる。

2. 2次行列の逆行列が整数値の場合

$$(1) A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{2 \times 2 - 3 \times 1} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(2) B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

(1) で分かるように、分母が1ならば、 $\det(A)=1$ なので、 A^{-1} は整数値行列になる。教科書の例を見てみよう。

68 第2章 行列

問24 $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ のとき
次の行列を求めよ.

(1) $(AB)^{-1}$ (2) $B^{-1}A^{-1}$

図 1

答えは

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} -16 & 39 \\ 7 & -17 \end{pmatrix}$$

となり、成分は全て整数である。

代数学では、主として整式を扱うので学習には甚だ都合がよい。

行列式が1の行列は $SL(2, \mathbb{Z})$ と言う群に入るのであるが、この要素は2つの方法で作成できる。

$$1. T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ の組み合わせ}$$

2. $ad-bc=1$ 差が1であるからどちらかが偶数
→因数分解できる

特に、2の場合は初歩的な知識で作成が出来る。幾つか例を挙げてみよう。

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

又、これらどおしを掛けて得られる行列の逆行列の成分も全て整数である。

3. 3次行列の逆行列が整数値の場合

テキストでは、3次行列の逆行列は全てクラメールの定理か、行基本変換で求めている。

78 第2章 行列

【例題3】 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

図 2

答えは

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 10 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{となる。}$$

図 3

これも、 $SL(3, \mathbb{Z})$ の構成の問題であるが、直接的に

例題を作るには次のようにすればよい。

先の例を2列目、3列目に付け加えた行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

等である。このままでは、問題として単純過ぎるので、1行目にランダムな整数値を入れ、更に3列目をランダムに整数倍して1列目に加える。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -5 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2番目の行列の3列目を1列目から引いている。

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -5 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -14 \\ 0 & 3 & -5 \\ 1 & 7 & -12 \end{pmatrix} \text{ となり逆行列は}$$

確かに整数値行列である。

このままでは3列、1列の類似性が認められるので、行に関してもスクランブルを掛ける。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -5 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -3 & 6 & 1 \\ -4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

最後の場合は作成の逆をたどるのは難しい。

同様に最初にあげた例の2次行列から、逆行列が整数値の3次行列を作成すると、

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 5 & 8 & -7 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \\ 4 & -4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -7 & 6 & 5 \\ -6 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

となる。(行列式が1になる整数値行列)

4. 4次の行列式が±1の整数値行列

これも、先頭に基本ベクトルを付け加えた行列から変形していけばよい。

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & -7 & 6 & 5 \\ 0 & -6 & -1 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 2 \\ -6 & -3 & 6 & 1 \\ 1 & -4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 & 2 \\ -4 & -7 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & -4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

他の3次行列からも同様に作成することが出来る。

5. 解が整数の連立方程式の作成

テキスト(*1) p81の例題に

【例題4】 次の連立1次方程式を逆行列を用いて解け。

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ x + y - z = 2 \\ -5x + 5y + 2z = -2 \end{cases}$$

図4

これは、環論の考えを用いて

$$\text{【解】 } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -5 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ とおく.}$$

例題3より、Aの逆行列は存在して

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 10 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

よって、求める解は $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ より

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 10 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ 14 \end{pmatrix}$$

図5

と解答されている。3次の逆行列を用いて連立方程式を解く問題はこの章では2題しかない。

6. 3次行列の固有値、固有ベクトル

テキスト(*1) 第4章行列の応用、では行列を線形変換として捉えている。その、歪み方向が固有ベクトルであり、拡大率が固有値とされている。これは、2次までの行列では作題が容易であるが3次以上の例題の整数化は極めて難しい。テキストp140の例題を見ると、

【例題2】 次の行列の固有値、固有ベクトルを求めよ。

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

【解】 (1) $|A - \lambda E| = 0$ を計算すると

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) = 0$$

よって、Aの固有値は、 $\lambda = 1, 2, 3$

図6

問題が整数値行列なら、固有方程式は整数係数の固有方程式を持つ。(最高次元の項の係数が1の整式をモニックと言う。)しかし、その解が整数とは

限らない。例題2の解は

$$\begin{aligned} &\lambda = 1, \lambda = 2, \lambda = 3 \text{ に対する} \\ &\mathbf{A} \text{ の固有ベクトルを求めると} \\ &\mathbf{x}_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &\mathbf{x}_3 = c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2, c_3 \text{ は } 0 \text{ で} \\ &\quad \text{ない任意の実数}) \end{aligned}$$

図7

このような問題は数少なく、p142-p145に掛けて対角化の問題を含めて3題である。

7. 対角化の逆作業による作題

ジョルダンの定理よれば、 n 次正方行列は対角化されるか、または次のように標準化される。

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & a_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} a_i \text{ は同じ固有値} \\ \text{の上で } 1 \text{ または } 0 \\ \text{その他では } 0 \end{array}$$

ここでは、逆に異なる固有値を用意して、 P により対角化出来たと想定して、 A を求める。

$\lambda = 2, 3, 4$ の整数値行列を作成してみよう。

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -3 & 6 & 1 \\ -4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A = P(P^{-1}AP)P^{-1} = P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 88 & 22 & -38 \\ 120 & 34 & -54 \\ 259 & 67 & -113 \end{pmatrix}$$

$I=2, 3, 4$ に対して、固有ベクトルは

$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}, c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ となる}$$

回りくどいが、整数値行列を作成できた。

8. 4次行列と固有値、固有ベクトル

高専の教科書では、4次行列の固有値、固有ベクトルの記述はない。固有方程式の作成と、 $SL(4, \mathbb{Z})$ に入る行列の作成が困難であるからである。

4. で求めた行列を P として使い固有値・固有ベクトルの問題を作成してみよう。

$\lambda = 1, 2, 3, 4$ の整数値行列を作ってみよう。

例題 次の行列 A を対角化せよ。に対しては、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 & 2 \\ -4 & -7 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & -4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1237 & 711 & 182 & -318 \\ -1452 & -834 & -214 & 374 \\ -1161 & -669 & -168 & 300 \\ 885 & 509 & 131 & -225 \end{pmatrix}$$

1次増加しただけであるが、固有方程式を作成することだけでも困難になる。

此处で固有方程式（ケイリー・ハミルトンの方程式）の求め方を考えてみよう。

本来は $\det(A - \lambda E) = 0$ であるが、代数学の方法をとると、

$$\lambda^4 - a\lambda^3 + b\lambda^2 - c\lambda + d = 0 \text{ であり}$$

$$a = \text{trace}(A) \quad \dots \quad d = \det(A)$$

の計算で行う。

$$a = 1237 - 834 - 168 - 225 = 10$$

$$b = \begin{vmatrix} 1237 & 711 \\ -1452 & -834 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -834 & -214 \\ -669 & -168 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -168 & 300 \\ 131 & -225 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1237 & 182 \\ -1161 & -168 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -834 & 374 \\ 509 & -225 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1237 & -318 \\ 885 & -225 \end{vmatrix} = 35$$

$$c = \begin{vmatrix} 1237 & 711 & 182 \\ -1452 & -834 & -214 \\ -1161 & -669 & -168 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -834 & -214 & 374 \\ -669 & -168 & 300 \\ 509 & 131 & -225 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1237 & 182 & -318 \\ -1161 & -168 & 300 \\ 885 & 131 & -225 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1237 & 711 & -318 \\ -1452 & -834 & 374 \\ 885 & 509 & -225 \end{vmatrix} = 50$$

$$d = \begin{vmatrix} 1237 & 711 & 182 & -318 \\ -1452 & -834 & -214 & 374 \\ -1161 & -669 & -168 & 300 \\ 885 & 509 & 131 & -225 \end{vmatrix} = 24$$

$$\lambda^4 - 10\lambda^3 + 35\lambda^2 - 50\lambda + 24 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda - 4)$$

9. エクセルによる、此处までの作業。

<table><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>2</td><td>5</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>3</td></tr></table>	1	0	0	0	2	5	0	1	3	<table><tr><td>1</td><td>-2</td><td>2</td></tr><tr><td>0</td><td>2</td><td>5</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>3</td></tr></table>	1	-2	2	0	2	5	0	1	3	<table><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>-1</td><td>0</td><td>1</td></tr></table>	1	0	0	0	1	0	-1	0	1
1	0	0																											
0	2	5																											
0	1	3																											
1	-2	2																											
0	2	5																											
0	1	3																											
1	0	0																											
0	1	0																											
-1	0	1																											
<table><tr><td>-1</td><td>-2</td><td>2</td></tr><tr><td>-5</td><td>2</td><td>5</td></tr><tr><td>-3</td><td>1</td><td>3</td></tr></table>	-1	-2	2	-5	2	5	-3	1	3	<table><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>-2</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr></table>	1	0	0	-2	1	0	1	0	1	<table><tr><td>-1</td><td>-2</td><td>2</td></tr><tr><td>-3</td><td>6</td><td>1</td></tr><tr><td>-4</td><td>-1</td><td>5</td></tr></table>	-1	-2	2	-3	6	1	-4	-1	5
-1	-2	2																											
-5	2	5																											
-3	1	3																											
1	0	0																											
-2	1	0																											
1	0	1																											
-1	-2	2																											
-3	6	1																											
-4	-1	5																											

図8

上段の灰色行列は右から、下段の灰色行列は左から掛けたものである。

同様に

1	3	-2	2
0	-1	-2	2
0	-3	6	1
0	-4	-1	5

1	0	0	0
0	1	0	0
-1	0	1	0
0	0	0	1

3	3	-2	2
2	-1	-2	2
-6	-3	6	1
1	-4	-1	5

1	0	0	0
-2	1	0	0
1	0	1	0
0	0	0	1

3	3	-2	2
-4	-7	2	-2
-3	0	4	3
1	-4	-1	5

図 9

Det=1 なる 4 次の行列が得られた。

対角行列と上記の逆行列を用いて作題すると、

1	0	0	0
0	2	0	0
0	0	3	0
0	0	0	4

-217	-125	-32	56
54	31	8	-14
-198	-114	-29	51
47	27	7	-12

1237	711	182	-318
-1452	-834	-214	374
-1161	-669	-168	300
885	509	131	-225

灰色は逆行列
← PAP^{-1}

図10

固有方程式についてもエクセルを用いると

1237	711	182	-318
-1452	-834	-214	374
-1161	-669	-168	300
885	509	131	-225

trace 10
det1 714
det2 -1500

1237	182	711	-318
-1161	-168	-669	300
-1452	-214	-834	374
885	131	509	-225

det3 3486
det4 -2716

1237	-318	711	182
885	-225	509	131
-1452	374	-834	-214
-1161	300	-669	-168

det5 3105
det6 -3054
sum 35

図11

此处でtraceの10は3次の係数の-10を示す。
sumはdet1~6の灰色行列式の合計で2次の係数35を表す。4次の係数は1である。

続けて1次の係数、定数を求める。

1237	771	182	-318
-1452	-834	-214	374
-1161	-669	-168	300
885	509	131	-225

det1 1248

-834	-214	374	-1452
-669	-168	300	-1161
509	131	-225	885
711	182	-318	1237

det2 -9948

1237	182	-318	711
-1161	-168	300	-669
885	131	-225	509
-1452	-214	374	-834

det3 7248

1237	711	-318	182
-1452	-834	374	-214
885	509	-225	131
-1161	-669	300	-168

det4 1502
sum 50

図12

det1~4は灰色行列式、sumは1次の係数-50を示す。定数項は4次行列式の24になる。

10. 固有方程式の解と固有ベクトル

先ず固有方程式の因数分解を行う。

$$\lambda^4 - 10\lambda^3 + 35\lambda^2 - 50\lambda + 24 = f(\lambda)$$

$$24 = 2^3 \times 3 \text{ より、1, 2, 3 を代入して因数}$$

分解するが此处では直接組み立て除法を用いて計算する。

1	1	-10	35	-50	24
		1	-9	26	-24
2	1	-9	26	-24	0
		2	-14	24	0
3	1	-7	12	0	0
		3	-12	0	0
	1	-4	0	0	0

1行目は $f(\lambda)$ の係数を表している。

2段目の灰色は $x-1$ で割った時の商の係数

よって、 $f(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4)$ となる。

4次の連立方程式の様に複雑な場合、任意定数 c_1 を無視してどれか成分を決めて、仮に1としておく。此处では $w=1$ としよう。

$\lambda=1$ に対しては

$$\begin{pmatrix} 1237 & 711 & 182 & -318 \\ -1452 & -834 & -214 & 374 \\ -1161 & -669 & -168 & 300 \\ 885 & 509 & 131 & -225 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

続けて

$$\begin{aligned} 1237x + 711y + 182z - 318 &= x & x &= 3 \\ -1452x - 834y - 214z + 374 &= y & y &= -4 \\ -1161x - 669y - 168z + 300 &= z & z &= -3 \end{aligned}$$

$$\lambda=1 \quad \text{に対して} \quad x_1 = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となり、固有値と固有ベクトルの対応を得る。

$$\begin{aligned} 1237x + 711y + 182z - 318 &= 2x & x &= -3/4 \\ -1452x - 834y - 214z + 374 &= 2y & y &= 7/4 \\ -1161x - 669y - 168z + 300 &= 2z & z &= 0 \end{aligned}$$

$$\lambda=2 \quad \text{に対して} \quad x_2 = c_2 \begin{pmatrix} -3/4 \\ 7/4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c_2' \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

更に、

$$\begin{aligned} 1237x + 711y + 182z - 318 &= 3x & x &= 2 \\ -1452x - 834y - 214z + 374 &= 3y & y &= -2 \\ -1161x - 669y - 168z + 300 &= 3z & z &= -4 \end{aligned}$$

$$\lambda=3 \quad \text{に対して} \quad x_3 = c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = c_3' \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

最後に

$$\begin{aligned} 1237x + 711y + 182z - 318 &= 4x & x &= 2/5 \\ -1452x - 834y - 214z + 374 &= 4y & y &= -2/5 \\ -1161x - 669y - 168z + 300 &= 4z & z &= 3/5 \end{aligned}$$

$$\lambda=4 \quad \text{に対して} \quad x_4 = c_4 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

となり、最初のPが対角化行列として現れる。

11. 4次行列と対角化行列の例

ここで、整数値の行列A、対角化行列Pとその対角化の例をエクセルで書いてみる。

例1

A=	-11	-26	-29	19
	3	7	5	-2
	3	8	13	-11
	3	8	11	-9

P=	-3	1	-1	-4
	1	0	-1	1
	1	-1	2	1
	1	-1	1	1

$P^{-1}AP=$	1	0	0	0
	0	-1	0	0
	0	0	2	0
	0	0	0	-2

例2

A=	-5	-10	-7	-3
	3	7	5	2
	-3	-8	-9	-5
	3	8	11	7

P=	-1	-1	1	-2
	1	0	-1	1
	-1	1	0	-1
	1	-1	1	1

$P^{-1}AP=$	1	0	0	0
	0	-1	0	0
	0	0	2	0
	0	0	0	-2

例3

A=	-5	1	15	8
	3	-2	-13	-7
	-3	-2	3	1
	3	5	5	4

P=	-1	0	1	-2
	1	1	-1	1
	-1	1	0	-1
	1	-2	1	1

$P^{-1}AP=$	1	0	0	0
	0	-1	0	0
	0	0	2	0
	0	0	0	-2

固有値は対角線上の数値であり、固有ベクトルはPの対応する列ベクトルである。

12. 3次行列で固有方程式が重解を持つ場合。

テキスト(*1) p149では、対称行列で2重解を持

つ場合を直交行列で対角化する例題を扱っている。
対称行列はジョルダンの定理より対角化可能である。

【例題 6】 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ を直交行列
により対角化せよ。

固有方程式は2重解をもつが、対称行列であるので、対角化できる。

【解】 固有方程式は

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & -2-\lambda & 2 \\ -1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-2)^2(\lambda+4) = 0$$

$$\lambda = 2 \text{ (2重解)}, -4$$

ケイリー・ハミルトンの定理では
 $\text{trace}(A)=0 \quad \det(A)=-16$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -6 \quad \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -6 \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^3 - 0\lambda^2 - 12\lambda + 16 = (\lambda-2)^2(\lambda+4)$$

より、 $\lambda = 2$ (2重解)、 -4

$\lambda = 2$ に対する固有ベクトルを求めると

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 2c_1 - c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c_1, c_2 はともに 0 ではない任意の実数

ここで、線形独立な 2 つの固有ベクトル

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{から}$$

大きさが 1 で互いに直交するベクトル $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ を作る

$$\mathbf{x}_1 = \pm \frac{\mathbf{p}_1}{|\mathbf{p}_1|} = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{とおくと} \quad |\mathbf{x}_1| = 1$$

図13~15

シュミットの直交化という作業を続けると

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{p}_2 - (\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{x}_1) \mathbf{x}_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{とおくと}$$

$$\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{x}_1 = 0 \quad \text{である.}$$

$$\mathbf{x}_2 = \pm \frac{\mathbf{u}_2}{|\mathbf{u}_2|} = \pm \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{とおくと} \quad |\mathbf{x}_2| = 1, \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = 0 \quad \text{が成り立つ.}$$

残りのベクトルは $\lambda = -4$ に対応するベクトルは

$\lambda = -4$ に対する大きさが 1 の固有ベクトルは、

$$\mathbf{x}_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{であるから、たとえば}$$

$$T = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \quad \text{とおくと}$$

$${}^tTAT = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

図16・17

利用には外積を用いる方法が優れている。

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

外積により $\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を求めると

$$\mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & i \\ 1 & -2 & j \\ 0 & 1 & k \end{vmatrix} = i - 2j - 5k \quad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となり、対角化が行われる。

13. 3次行列で固有値が2重解の場合の実例。

例1

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 2 & -2 \\ -35 & -8 & 10 \\ -7 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 5 & 8 & -7 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

例2

$$A = \begin{bmatrix} -65 & -48 & -28 \\ 32 & 23 & 14 \\ 96 & 72 & 41 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \\ 4 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

例3

$$A = \begin{bmatrix} -84 & -22 & 40 \\ -215 & -53 & 100 \\ -301 & -77 & 142 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -7 & 6 & 5 \\ -6 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

これらを見ても分かるように、固有方程式が2重解を持つ場合でも、対称行列になるとは言えない。

14. 固有値が2重解を持つ対称行列の作成

テキスト(*1)では、12で紹介したp149例題6とp150問7のみが、「固有値が2重解を持つ対称行列」としてあげられている。

しかし ${}^t({}^tPP) = {}^tPP$ より tPP は対称行列であるので、これを利用すると、自由に例題を作ることが出来る。

例1

$$A = \begin{bmatrix} -961 & -279 & 369 \\ 3745 & 1087 & -1435 \\ 321 & 93 & -121 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 5 & 8 & -7 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = P^tP = \begin{bmatrix} 9 & -35 & -3 \\ -35 & 138 & 13 \\ -3 & 13 & 2 \end{bmatrix}$$

$$Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

例2

$$A = \begin{bmatrix} -1141 & -844 & -488 \\ -11970 & -8863 & -5124 \\ 23370 & 17302 & 10003 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \\ 4 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$Q = P^tP = \begin{bmatrix} 9 & -11 & -2 \\ -11 & 27 & -21 \\ -2 & -21 & 41 \end{bmatrix}$$

$$Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

更に数値が巨大であるが、13の例3に対応するものとして、

例3

$$A = \begin{bmatrix} 45432 & 11638 & -21230 \\ 146615 & 37561 & -68515 \\ 177590 & 45494 & -82988 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -7 & 6 & 5 \\ -6 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$Q = P^t P = \begin{bmatrix} 9 & 5 & 22 \\ 5 & 110 & 71 \\ 22 & 71 & 86 \end{bmatrix}$$

$$Q^{-1} A Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

これらの対角化行列は、直交行列ではない。直交行列にすると、もはや整数値行列ではなくなってしまう。

15. 直交行列による対角化の作題方法

Trivialのものを除いて、対角化行列且つ直交行列は作成不能である。しかし、それでもなお直交する整数値の固有ベクトルから作成される行列で対角化する場合、行列Aは分母にPの行列式の値が現れて、整数値にならない。それを避けるためには固有値をPの行列式の倍数にする必要がある。

例えば2本のベクトル $p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, p_2 = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ が直交するとすると、

$$x - 2 \times 0 + 1 = 0 \quad x = -1$$

よって $p_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる。

これに直交する第3のベクトル $p_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ は外積で作られる。

$$p_3 = p_1 \times p_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & i \\ -2 & 0 & j \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = -2i - 2j - 2k$$

よって

$$p_3 = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

これを用いて、2重解固有値を持つ行列を作成すると、

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ となるように } A \text{ を決める}$$

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 11 & 2 & -1 \\ 2 & 8 & 2 \\ -1 & 2 & 11 \end{pmatrix}$$

となり、対称行列であるが、もはや整数値行列ではない。

但し、固有値を、6の倍数にとれば、

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \text{ を目指すと、}$$

$$A = P \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

となり、対称行列で、整数値行列でその対角化行列は、次のような単一分母を持つ分数×整数値行列を得る。

$$P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \text{ に対して}$$

$$A = P \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \text{ となる。}$$

16. まとめ

何故、このように数値の大きな整数値行列が必要か、また、将来に役立つのかと言う疑問には、「分数値になると、近似値か真の値か分からなくなる。整数値では、電卓一つで論理値としての計算が出来る。」点があげられる。「実用的にはエクセルを用いるのがよいが、その学習だけでも将来に役に立つ。特に、学習者がエクセルを使って作題も行うことは真の理解につながることになる。」と答えたい。

参考) * 1 新訂線形代数学：大日本図書

「受理年月日 2008年9月29日」